

Uniwersytet Jagielloński
Instytut Fizyki im. Mariana Smoluchowskiego



Parowanie trypletowe elektronów
zaindukowane oddziaływaniami
wymiennymi.

Zygmunt Starypan

Praca magisterska
wykonana w Zakładzie Teorii Materii Skondensowanej
Opiekun pracy: prof. dr hab. Józef Spałek

Kraków, czerwiec 2004

Opiekunowi mojej pracy magisterskiej
za wskazanie tematu oraz nieocenioną pomoc
jakiej mi udzielił w trakcie moich studiów,
pragnę gorąco podziękować.

Spis treści

1	Wstęp	4
1.1	Wprowadzenie.	4
1.2	Uwaga metodologiczna.	6
1.3	Cel pracy.	7
2	Ogólne sformułowanie problemu Coopera	8
2.1	Wprowadzenie.	8
2.2	Rozwiązanie problemu.	9
2.2.1	Gęstość stanów, energia Fermiego i stacjonarne równanie Schrödingera.	9
2.2.2	Energia wiązania i potencjał parujący w przestrzeni pędów.	12
2.3	Podsumowanie rozdziału.	19
3	Układ elektronów o spinowo-zależnych masach	20
3.1	Wprowadzenie.	20
3.2	Rozwiązanie problemu.	21
3.2.1	Energia Fermiego i gęstość stanów.	21
3.2.2	Energia wiązania i potencjał parujący w przestrzeni pędów.	25
3.3	Podsumowanie rozdziału.	31
4	Problem Coopera w języku II kwantowania	32
4.1	Podstawowe definicje w II kwantowaniu.	32
4.2	Rozwiązanie problemu Coopera w języku II kwantowania.	34
4.3	Podsumowanie rozdziału.	35
5	Podsumowanie pracy	36

Rozdział 1

Wstęp

1.1 Wprowadzenie.

Zjawisko nadprzewodnictwa zostało odkryte w 1911 r. przez H. Kamerlinga Onnesa [2]. Zaobserwował on gwałtowny spadek do zera oporu w próbce rtęci, którą schłodzono poniżej temperatury 4,2 K. Druga podstawowa cecha stanu nadprzewodzącego, a mianowicie idealny diamagnetyzm, została odkryta w 1933 r. przez Meissnera i Ochsenfelda. Zaobserwowane własności nowo odkrytych materiałów otwierały przed nimi szeroki zakres zastosowań. Poważnym ograniczeniem pierwszych nadprzewodników były: mały prąd krytyczny, niskie krytyczne pole magnetyczne \mathbf{H}_C niszczące nadprzewodnictwo a także niska temperatura przejścia w stan nadprzewodzący. Niezbędne zatem stało się teoretyczne wyjaśnienie nowo odkrytego zjawiska, bowiem zrozumienie go mogło pomóc w przewyżczeniu ograniczeń występujących dla pierwszych odkrytych nadprzewodników.

Pierwszym modelem, który w prosty sposób tłumaczył efekt Meissnera-Ochsenfelda, był model "dwucieczowy", zaproponowany przez braci Londonów w 1934 r. Postulowali oni istnienie w nadprzewodniku dwóch rodzajów elektronów, tzw. składowej normalnej i nadciekłej; przy czym ta nadciekła odpowiadała za bezoporowy przepływ prądu. Już tak proste założenie pozwoliło przewidzieć istnienie głębokości wnikania λ , na którą następuje penetracja próbki przez natężenie pola magnetycznego \mathbf{H} .

W 1950 r. Ginzburg i Landau podali fenomenologiczną (makroskopową) teorię nadprzewodnictwa. W swym podejściu wykorzystali teorię Landaua dotyczącą przejść fazowych II rodzaju, w której wprowadza się modyfikację energii swobodnej Helmholtza o składniki zawierające parametr porządku. Teoria ta okazała się niezwykle trafna i umożliwiła przewidzenie wielu dalszych własności nadprzewodników, zwłaszcza przy obecności pola magne-

tycznego, m.in. odkrytych (teoretycznie) przez Abrikosova w 1957 r. nadprzewodników II rodzaju. W materiałach tych strumień pola magnetycznego powyżej wartości krytycznej natężenia pola magnetycznego $\mathbf{H} = \mathbf{H}_{c1}$ wnika do wnętrza próbki w postaci wirów.

Pomimo sukcesów, przedstawione teorie miały jedną zasadniczą wadę: nie dawały wyjaśnienia zjawiska nadprzewodnictwa na poziomie mikroskopowym. Ciągłe nie znana była przyczyna tak "dziwnego" zachowania się elektronów w tych materiałach.

Pierwsza mikroskopowa teoria nadprzewodnictwa została przedstawiona w 1957 r. przez Bardeena, Coopera i Schriefera - jest to tzw. teoria BCS. Kluczem do jej sformułowania stało się rozwiązanie tzw. "problemu Coopera" [6]. Rozwiązanie to przewidywało efekt łączenia się pojedynczych elektronów w metalu w stany związane par (tzw. pary Coopera) na skutek przyciągającego efektywnego oddziaływania między nimi. W spektrum wzbudzeń elektronowych układu występuje wtedy przerwa energetyczna, oddzielająca stan podstawowy od stanu rozerwanej pary elektronów. W rzeczywistym materiale nadprzewodzącym elektrony parują się (przy czym jeden elektron jest sparowany z wieloma innymi) i poniżej temperatury krytycznej $T = T_s$ pary elektronów kondensują w silnie skorelowany kondensat par, które poruszają się poprzez układ bezoporowo.

Teoria BCS opisuje doskonale klasyczne materiały nadprzewodzące zwane nadprzewodnikami I rodzaju. W jej ramach można obliczyć wiele użytecznych własności ściśle zgadzających się z doświadczeniem. Jednakże nie sprawdza się ona w przypadku odkrytych w 1986 r. przez G. Bednorza i K. Müllera [9] nadprzewodników wysokotemperaturowych. Zjawiska zachodzące w tych materiałach próbuje się opisać poprzez różnorodne modyfikacje teorii BCS, lub też przez zupełnie nowe podejście teoretyczne. Pomimo wszelkich dotychczasowych starań, jednolita teoria nadprzewodnictwa wysokotemperaturowego nie została jeszcze stworzona. Podobnie ma się sytuacja z nadprzewodnictwem w materiałach takich jak układy ciężkich fermionów ($CeCu_2Si_2$, UBe_{13} , itd.) czy metale organiczne.

1.2 Uwaga metodologiczna.

Oddziaływanie wymienne charakteryzuje się zależnością od iloczynu skalar-
nego spinów $\vec{S}_\alpha \cdot \vec{S}_\beta$, gdzie \vec{S}_α oraz \vec{S}_β są operatorami spinu wyrażonymi w
reprezentacji fermionowej, np.

$$\vec{S}_\alpha \equiv (S_\alpha^+, S_\alpha^-, S_\alpha^z) = (a_{\alpha\uparrow}^\dagger a_{\alpha\downarrow}, a_{\alpha\downarrow}^\dagger a_{\alpha\uparrow}, \frac{1}{2}(a_{\alpha\uparrow}^\dagger a_{\alpha\uparrow} - a_{\alpha\downarrow}^\dagger a_{\alpha\downarrow})).$$

W ogólności zatem będziemy rozważać potencjał parujący w I kwantowaniu
jako zależny od $\cos\theta_{\alpha\alpha'}$, gdzie $\theta_{\alpha\alpha'}$ jest kątem względnym pomiędzy spinami w
stanach $|\alpha\rangle|\alpha'\rangle$. Sprawa ma się trochę inaczej jeżeli używamy reprezentacji II
kwantowania. Ścisłej mówiąc, parowanie elektronów ze spinami równoległymi
wymaga ze względu na zakaz Pauliego nietrywialnego charakteru potencjału
parowania. A to zwykle oznacza, że funkcje falowe pary muszą zawierać
składowe z niezerowym momentem pędu, co w konsekwencji prowadzi do
nietrywialnej zależności kątowej i to zarówno potencjału parującego jak i
wynikających z niego funkcji falowych. W tej pracy będziemy więc zatem
rozwijać w harmoniki sferyczne funkcje falowe przy potencjale rozwijanym w
odpowiadające im funkcje Legendre'a.

1.3 Cel pracy.

Celem niniejszej pracy jest zbadanie mechanizmu tworzenia się stanu związanego dwóch elektronów zaindukowanego oddziaływaniami wymiennymi. Jak już to powiedzieliśmy wyżej, takie oddziaływanie zależy w sposób nietrywialny od kąta jaki tworzą między sobą spiny elektronów. Prowadzić to powinno do nietrywialnego stanu spinowego cząstek w stanie związanym.

Rozdział pierwszy zawiera krótką historię nadprzewodnictwa. W rozdziale drugim rozważamy mechanizm ogólnego parowania dwóch elektronów zaindukowanego oddziaływaniami wymiennymi. Rozdział trzeci poświęcony został parowaniu dwóch elektronów, których masa dodatkowo zależy od rzutów ich spinów na zadaną oś kwantyzacji (czyli od liczby kwantowej "m"). Problem omówiony w tym rozdziale może wydawać się bardzo abstrakcyjny i oderwany od rzeczywistości. Jednakże, jak pokazane zostało w pracach [4] i [5], istnieją układy ze zniesioną degeneracją spinową elektronów, w których na skutek oddziaływania kulombowskiego typu Hubbarda masa efektywna elektronów zależy od orientacji ich spinów.

W rozdziale czwartym w zwięzły sposób zostały przedstawione w języku II kwantowania problemy omówione w rozdziałach poprzednich.

Połączenie powyższych rozważań w jednolity formalizm pozwoli na stworzenie ogólnego modelu parowania elektronów zaindukowanego oddziaływaniami wymiennymi.

Rozdział 2

Ogólne sformułowanie problemu Coopera

2.1 Wprowadzenie.

W tym rozdziale rozważamy pojedynczą parę elektronów znajdujących się na lub powyżej powierzchni Fermiego i oddziałujących ze sobą słabym potencjałem przyciągającym. O spinie wypadkowym stanów pary nie będziemy nic zakładać. W tym przypadku zaistnieć mogą dwie możliwości parowania.

Pierwsza to taka, w której rozpatrywane elektrony mają antyrównoległe (przeciwnie) spiny. Taką parę elektronów nazywamy parą singletową, zaś samo parowanie określa się mianem singletowego.

Druga z tych możliwości to taka, w której rozpatrywane elektrony mają równoległe spiny. Taką parę elektronów nazywamy parą trypletową, a samo parowanie określa się jako trypletowe.

Oddziaływanie pomiędzy elektronami wewnątrz kuli Fermiego a opisywaną parą elektronów jest na tyle słabe, że możemy je zaniedbać (mówimy wtedy, że pojedyncza para Coopera nie jest w stanie wzburzyć spokojnego morza Fermiego). Ściślej mówiąc, opisujemy elektrony w pobliżu powierzchni Fermiego jako niezależne kwazicząstki charakteryzujące elektronową ciecz Fermiego-Landaua. Z powodu podobieństw zjawiska nadprzewodnictwa w różnych materiałach zakładamy, że szczegóły ich struktury elektronowej i krystalicznej nie mają wpływu na jakościowe zrozumienie stanu nadprzewodzącego. Stąd też zamiast periodycznego potencjału pochodzącego od sieci krystalicznej jonów, wprowadza się pudło o objętości V , a efekty tych oddziaływań kulombowskich a także oddziaływanie odpychające między elektronami, zawarte są w masie efektywnej kwazicząstek.

2.2 Rozwiązanie problemu.

2.2.1 Gęstość stanów, energia Fermiego i stacjonarne równanie Schrödingera.

Przy okresowych warunkach brzegowych, stany energetyczne elektronów w pudle potencjału opiswane są niezaburzoną funkcją falową [2] postaci:

$$\Psi_n(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}}, \quad (2.1)$$

oraz energią:

$$E_{\mathbf{k}_n} = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}_n^2}{2m}, \quad (2.2)$$

gdzie wartości wektora falowego przyjmują dyskretne wartości:

$$\mathbf{k}_n = \frac{2\pi}{V^{1/3}} [n_1, n_2, n_3], \quad \text{oraz} \quad n_1, n_2, n_3 \in Z, \quad (2.3)$$

natomiast m jest masą efektywną elektronu w takim ośrodku.

Ze względu na degenerację spinową każdy stan może być obsadzony dwukrotnie. Dla $T = 0$ wszystkie poziomy energetyczne, aż do poziomu odpowiadającego energii Fermiego $E_F = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}_F^2}{2m}$ (zgodnie z zasadą Pauliego), są zajęte. Oznacza to, że w przestrzeni pędów wszystkie stany pędowe wewnątrz kuli Fermiego o promieniu k_F (wektor falowy Fermiego) są obsadzone. W pracy tej używamy wymiennie pojęcia wektora falowego \mathbf{k} i pędu $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$, nawet bez pisania \hbar w tym drugim przypadku.

Dla N elektronów w układzie można łatwo znaleźć wyrażenie na k_F :

$$k_F = \left(3\pi^2 \frac{N}{V}\right)^{1/3}. \quad (2.4)$$

Natomiast gęstość stanów w takim układzie o objętości V dana jest wtedy zależnością:

$$\rho(E) = \frac{(2m)^{3/2}}{2\pi^2 \hbar^3} V \sqrt{E}. \quad (2.5)$$

Reguła Pauliego oraz brak założeń dotyczących spinów, rozważanych elektronów, prowadzą do wniosku, że część przestrzenna funkcji falowej takiej pary w przypadku swobodnych cząstek (bez oddziaływania) jest następująca:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \tilde{\Psi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{V} e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1} e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_2} & \text{dla pary singletowej,} \\ \tilde{\Psi}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{V} [e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1} e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_2} - e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_2} e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_1}] & \text{dla pary trypletowej.} \end{array} \right. \quad (2.6)$$

Przedstawione powyżej zależności wynikają z następującego rozumowania. Funkcja falowa układu N fermionów jest antysymetryczna, co wiadomo z [1]. Dodatkowo wiemy, że część spinowa tej funkcji falowej jest odpowiednio: antysymetryczna dla singletu (spiny antyrównoległe) i symetryczna w przypadku trypletu (spiny równoległe). Więc aby zachować antysymetrię całkowitej funkcji falowej układu, która jest iloczynem swej części spinowej i przestrzennej, musimy przyjąć jako zależności określające odpowiednio jej części przestrzenne, funkcje dane w powyższym układzie.

W wyniku oddziaływania elektronów, które prowadzi do ich wzajemnego rozpraszania, pędy \mathbf{k}_1 i \mathbf{k}_2 przestają być dobrymi liczbami kwantowymi. Oznacza to, że jako funkcję falową układu przyjmujemy superpozycję funkcji falowych danych równaniem (2.1), w postaci:

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \chi_{\sigma_1, \sigma_2} \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} a_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1} e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_2}, \quad (2.7)$$

gdzie we współczynnikach $a_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}$ kryje się symetria (antysymetria) przestrzennej części funkcji falowej, natomiast $\chi_{\sigma_1, \sigma_2}$ jest spinową częścią rozpatrywanej funkcji falowej.

Ponieważ wszystkie stany poniżej poziomu Fermiego są obsadzone, musimy narzucić na współczynniki $a_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}$ warunek uwzględniający zakaz Pauliego:

$$a_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} = 0 \quad \text{dla } |\mathbf{k}_1|, |\mathbf{k}_2| \leq k_F. \quad (2.8)$$

Stacjonarne równanie Schrödingera dla pojedynczej pary w rozpatrywanym przypadku ma postać:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{\mathbf{r}_1}^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{\mathbf{r}_2}^2 + V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \right] \Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = E\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \quad (2.9)$$

Opisuje ono problem dwóch ciał o jednakowych masach $m_1 = m_2 = m$ i energii potencjalnej wzajemnego oddziaływania $V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$.

Po transformacji zarówno funkcji falowej jak i równania Schrödingera do współrzędnych środka masy (\mathbf{K}, \mathbf{R}) oraz współrzędnych względnych (\mathbf{k}, \mathbf{r}) zdefiniowanych odpowiednio w postaci:

$$\begin{cases} \mathbf{R} = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2} \\ \mathbf{K} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 \end{cases},$$

oraz

$$\begin{cases} \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{k} = \frac{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}{2} \end{cases},$$

oraz przy dodatkowym założeniu, że potencjał oddziaływania zależy jedynie od względnej odległości elektronów $V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = V(|\mathbf{r}|) = V(r)$ otrzymujemy zarówno funkcję falową w postaci

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \chi_{\sigma_1, \sigma_2} \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{K}, \mathbf{k}} a_{\mathbf{K}, \mathbf{k}} e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad (2.10)$$

jak i stacjonarne równanie Schrödingera typu

$$\left[-\frac{\hbar^2}{4m} \nabla_{\mathbf{R}}^2 - \frac{\hbar^2}{m} \nabla_{\mathbf{r}}^2 + V(r) - E \right] \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{K}, \mathbf{k}} a_{\mathbf{K}, \mathbf{k}} e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = 0, \quad (2.11)$$

w którym oczywiście nie występuje spinowa część funkcji falowej. Ponieważ występowała po obu stronach równania i żaden z operatorów na nią nie działał więc można ją opuścić.

W następnym kroku należy pomnożyć otrzymane równanie lewostronnie przez: $\frac{1}{V} e^{-i\mathbf{K}' \cdot \mathbf{R}} e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}}$ a następnie obie strony tego równania wycalkować względem $d^3 R$ i $d^3 r$. W wyniku takiego postępowania otrzymujemy równanie:

$$\sum_{\mathbf{K}, \mathbf{k}} \delta(\mathbf{K} - \mathbf{K}') \left[\delta(\mathbf{k}, \mathbf{k}') a_{\mathbf{K}, \mathbf{k}} \left(\frac{\hbar^2 K^2}{4m} + \frac{\hbar^2 k^2}{m} - E \right) + a_{\mathbf{K}, \mathbf{k}} V_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} \right] = 0, \quad (2.12)$$

gdzie: $V_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} = \frac{1}{V} \int d^3 r e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} V(r) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$. Widać, że całe równanie jest mnożone przez $\delta(\mathbf{K} - \mathbf{K}')$, co oznacza, że pęd środka masy jest w tym układzie wielkością zachowaną, jak powinno być, gdyż oddziaływanie wzajemne może jedynie zmienić pęd względny. Z tego też względu współczynniki $a_{\mathbf{K}, \mathbf{k}}$, które wprowadzają oddziaływanie do funkcji falowej, będą w dalszej części numerowane tylko indeksem \mathbf{k} . Zatem, równanie na energię własną układu przybiera teraz postać:

$$a_{\mathbf{k}'} \left(\frac{\hbar^2 K^2}{4m} + \frac{\hbar^2 k'^2}{m} - E \right) + \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} V_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} = 0 \quad (2.13)$$

i prowadzi ono do następującego równania

$$a_{\mathbf{k}'} = \frac{-1}{E(\mathbf{K}) + 2E(\mathbf{k}') - E} \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} V_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}. \quad (2.14)$$

gdzie: $E(\mathbf{K}) = \frac{\hbar^2 K^2}{4m}$ jest energią ruchu środka masy, $2E(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{m}$ jest energią ruchu względnego nie oddziałujących elektronów, natomiast E jest energią stanu związanego pary elektronów.

Ponieważ $|a_{\mathbf{k}}|^2$ jest miarą prawdopodobieństwa zaistnienia pary Coopera w stanie $|\mathbf{k}\rangle$ więc oczywistym jest, że największe prawdopodobieństwo powstania pary Coopera jest wtedy gdy: $\forall k \in \langle k_F, k_a \rangle : |a_{\mathbf{k}}|$ przyjmuje wartość maksymalną, (oczywiście należy pamiętać, że $\sum_{\mathbf{k}} |a_{\mathbf{k}}|^2$ jest równe jedności), co z kolei pociąga za sobą warunek: $E(\mathbf{K}) = 0$. Dla pędu środka masy równego zeru, energia wiązania osiąga wartość maksymalną. Takie założenie oznacza, że w stanie podstawowym para Coopera (zarówno singletowa jak i trypletowa) nie niesie ze sobą prądu elektrycznego (warunek $\mathbf{k} + \mathbf{k}' = 0$ oznacza $\mathbf{k}' = -\mathbf{k}$, a to przy założeniu, że masy obydwu elektronów tworzących parę są równe daje otrzymany rezultat).

Energię wiązania pary Coopera, definiujemy w następujący sposób:

$$E = E_{\mathbf{K}} + 2E_F - \Delta, \quad (2.15)$$

gdzie założyliśmy, że $E(\mathbf{k}) = E_F$

Uwzględniając w (2.14) zależność (2.15) otrzymujemy:

$$a_{\mathbf{k}'} = \frac{-1}{2[E(\mathbf{k}') - E_F] + \Delta} \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} V_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}. \quad (2.16)$$

Powyższe równanie jest punktem wyjścia do dalszych rozważań dotyczących par Coopera.

2.2.2 Energia wiązania i potencjał parujący w przestrzeni pędów.

Aby można było kontynuować rozpoczęte rachunki należy powiedzieć czym tak naprawdę są współczynniki $a_{\mathbf{k}}$ oraz jaką postać w przestrzeni pędów ma potencjał parujący $V_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}$.

Potencjał parujący w przestrzeni pędów w ogólnym przypadku zależy od wartości obu wektorów \mathbf{k}, \mathbf{k}' oraz od kąta względnego między nimi (oznaczymy go przez $\tilde{\theta}$). Moglibyśmy zatem zapisać nasz potencjał w bazie ortonormalnych stowarzyszonych funkcji Legendre'a P_l^m . Jednakże w kryształach, w którym rozważamy pojedynczą parę Coopera, nie istnieje wyróżniony kierunek w przestrzeni. Zatem wartość liczby kwantowej m nie będzie odgrywać tutaj roli. Warunek ten pozwala nam zapisać rozpatrywany potencjał w bazie ortonormalnych wielomianów Legendre'a

$$P_l = \frac{1}{2^l l!} \frac{\partial^l}{\partial x^l} (x^2 - 1)^l$$

względem zmiennej $x = \cos \tilde{\theta} = \hat{k} \cdot \hat{k}'$. W zależności powyższej \hat{k} i \hat{k}' są wersorami odpowiednio w kierunkach wektora \mathbf{k} i \mathbf{k}' , natomiast $\tilde{\theta}$ jest kątem względnym między tymi wektorami.

Współczynniki $a_{\mathbf{k}}$ zapiszemy w bazie ortonormalnych harmonik sferycznych $Y_{lm}(\theta, \varphi)$, które zdefiniowane są poprzez zależność:

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = \varepsilon \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi}.$$

gdzie: θ i φ są współrzędnymi wektora \mathbf{k} , w sferycznym układzie współrzędnych, wprowadzonym w przestrzeni pędów, w którym wektor ten ma następującą postać:

$$\begin{cases} k_x = k \sin \theta \cos \varphi \\ k_y = k \sin \theta \sin \varphi \\ k_z = k \cos \theta, \end{cases} \quad (2.17)$$

natomiast element ε zdefiniowany jest następująco:

$$\varepsilon = \begin{cases} (-1)^m, & \text{dla } m > 0; \\ 1, & \text{dla } m \leq 0. \end{cases}$$

Układ tych funkcji, (harmonik sferycznych), jest układem zupełnym, oznacza to, że zachodzi następująca relacja:

$$\sum_{lm} Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) = \delta(\theta - \theta') \delta(\varphi - \varphi'). \quad (2.18)$$

Ostatecznie więc mamy:

$$V_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} = - \left| \sum_l \sqrt{\frac{2l+1}{2}} P_l(\cos \tilde{\theta}) v_l(k, k') \right|, \quad (2.19)$$

oraz

$$a_{\mathbf{k}} = \sum_{lm} a_{lm} a_l(k) Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (2.20)$$

gdzie: $k = |\mathbf{k}|$, liczby a_{lm} są współczynnikami rozwinięcia, $\tilde{\theta}$ jest kątem pomiędzy wektorami \mathbf{k} i \mathbf{k}' . Natomiast moduł, zapewnia ujemną wartość potencjału, co odpowiada parowaniu się elektronów.

Rozpatrywana para ma ustaloną wartość liczby l (tutaj $l = 0$ lub $l = 1$), więc dla tej właśnie wartości l element v_l jest nie zerowy, a dla innych wartości l przyjmuje wartość zero. Warunek ten (narzucony przez fizykę rozpatrywanego problemu) pozwala nam na opuszczenie sumowania po l , co też w rezultacie prowadzi do równania postaci:

$$V_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} = - \sqrt{\frac{2l+1}{2}} P_l(\cos \tilde{\theta}) |v_l(k, k')|. \quad (2.21)$$

Przyjmując upraszczające założenie, że rozważane elektrony oddziałują między sobą tylko w wąskim przedziale wartości energii powyżej powierzchni Fermiego, możemy element v_l przybliżyć wyrażeniem:

$$v_l(k, k') = \begin{cases} v_l = \text{const}(k, k') & \text{dla } k_F < k, k' < k_a \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

gdzie k_a jest wartością pędu z założenia niewiele większą od k_F . Oznacza to, że przyciągające oddziaływanie między elektronami jest małe w porównaniu z energią Fermiego (jest to granica słabego sprzężenia, która stanowi także główne założenie teorii BCS).

Równanie (2.16) przybiera wtedy postać:

$$a_{\mathbf{k}'} = \frac{1}{2[E(\mathbf{k}') - E_F] + \Delta} \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{2l+1}{2}} P_l(\cos \tilde{\theta}) |v_l|. \quad (2.22)$$

Uwzględniając we wzorze (2.22) zależność (2.20) otrzymujemy:

$$\sum_{l'm'} a_{l'm'} a_{l'}(k') Y_{l'm'}(\theta', \varphi') = \frac{\sum_{\mathbf{k}l'm'} \sqrt{\frac{2l+1}{2}} |v_l| P_l(\cos \tilde{\theta}) a_{l'm'} a_{l'}(k) Y_{l'm'}(\theta, \varphi)}{2[E(\mathbf{k}') - E_F] + \Delta}. \quad (2.23)$$

Równanie powyższe można nazwać uogólnionym równaniem Coopera.

Przenosząc wszystkie wyrazy tego równania na jedną stronę otrzymujemy równanie postaci:

$$\sum_{l'm'} a_{l'm'} a_{l'}(k') Y_{l'm'}(\theta', \varphi') - \frac{\sum_{\mathbf{k}l'm'} \sqrt{\frac{2l+1}{2}} |v_l| P_l(\cos \tilde{\theta}) a_{l'm'} a_{l'}(k) Y_{l'm'}(\theta, \varphi)}{2[E(\mathbf{k}') - E_F] + \Delta} = 0 \quad (2.24)$$

z którego wynika następujący układ:

$$\forall l', m' : a_{l'}(k') Y_{l'm'}(\theta', \varphi') = \frac{\sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{2l+1}{2}} |v_l| P_l(\cos \tilde{\theta}) a_{l'm'} a_{l'}(k) Y_{l'm'}(\theta, \varphi)}{2[E(\mathbf{k}') - E_F] + \Delta}, \quad (2.25)$$

Następnie wykorzystując znaną regułę dla układów o rozmiarach makro, pozwalającą na zamienię sumy po stanach pędowych na całkę po objętości w przestrzeni pędów, postaci:

$$\sum_{\mathbf{k}} (\quad) = 2 \frac{V}{(2\pi)^3} \int (\quad) d^3k, \quad (2.26)$$

otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \forall l', m' : a_{l'}(k') Y_{l'm'}(\theta', \varphi') = \\ \left(\frac{2V}{(2\pi)^3} \right) \frac{\sqrt{\frac{2l'+1}{2}} |v_l| \int d^3k P_l(\cos\tilde{\theta}) a_{l'm'} a_{l'}(k) Y_{l'm'}(\theta, \varphi)}{2[E(\mathbf{k}') - E_F] + \Delta}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Po przejściu do współrzędnych sferycznych w przestrzeni \mathbf{k} , rozpatrywany układ przybiera następującą postać:

$$\begin{aligned} \forall l', m' : a_{l'}(k') Y_{l'm'}(\theta', \varphi') = \\ \left(\frac{2V}{(2\pi)^3} \right) \frac{\int a_{l'}(k) k^2 dk'}{2[E(\mathbf{k}') - E_F] + \Delta} \sqrt{\frac{2l'+1}{2}} |v_l| \int P_l(\cos\tilde{\theta}) Y_{l'm'}(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi \end{aligned} \quad (2.28)$$

Po obustronnym wymnożeniu każdego z równań stanowiących nasz układ przez $(k')^2$, i wycalkowaniu obydwu stron każdego z nich po składowej przestrzennej wektora \mathbf{k}' , otrzymujemy układ postaci:

$$\begin{aligned} \forall l', m' : Y_{l'm'}(\theta', \varphi') \int a_{l'}(k') (k')^2 dk' = \\ \left(\frac{2V}{(2\pi)^3} \right) \int \frac{(k')^2 \int a_{l'}(k) k^2 dk}{2[E(\mathbf{k}') - E_F] + \Delta} dk' \sqrt{\frac{2l'+1}{2}} |v_l| \int P_l(\cos\tilde{\theta}) Y_{l'm'}(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi \end{aligned} \quad (2.29)$$

Następnie uwzględniając fakt, że $\int a_{l'}(k') k'^2 dk' = \int a_{l'}(k) k^2 dk$ i jest to wartość skończona, rozpatrywany układ przechodzi w układ postaci:

$$\begin{aligned} \forall l', m' : Y_{l'm'}(\theta', \varphi') = \\ \frac{2V}{(2\pi)^3} \int \frac{\sqrt{\frac{2l'+1}{2}} dk' (2l'+1) |v_l| \int P_l(\cos\tilde{\theta}) Y_{l'm'}(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi}{2[E(\mathbf{k}') - E_F] + \Delta} (k')^2 dk'. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Następnie mnożąc obydwie strony każdego równania ostatniego układu przez $Y_{l'm'}^*(\theta'', \varphi'')$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \forall l', m' : Y_{l'm'}^*(\theta'', \varphi'') Y_{l'm'}(\theta', \varphi') = \\ \left(\frac{2V}{(2\pi)^3} \right) \int (k')^2 \frac{\sqrt{\frac{2l'+1}{2}} |v_l| dk'}{2[E(\mathbf{k}') - E_F] + \Delta} \int P_l(\cos\tilde{\theta}) Y_{l'm'}^*(\theta'', \varphi'') Y_{l'm'}(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Teraz obustronnie zsumujemy po l' i m' równania otrzymanego układu, co w rezultacie da nam równanie postaci:

$$\sum_{l'm'} Y_{l'm'}^*(\theta'', \varphi'') Y_{l'm'}(\theta', \varphi') = \left(\frac{2V}{(2\pi)^3} \right) \int \frac{(k')^2 \sqrt{\frac{2l+1}{2}} |v_l| dk'}{2[E(\mathbf{k}') - E_F] + \Delta} \int P_l(\cos\tilde{\theta}) \sum_{l'm'} Y_{l'm'}^*(\theta'', \varphi'') Y_{l'm'}(\theta, \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi, \quad (2.32)$$

które po uwzględnieniu warunku zupełności harmonik sferycznych, przechodzi w równanie

$$\delta(\theta'' - \theta') \delta(\varphi'' - \varphi') = \left(\frac{2V}{(2\pi)^3} \right) \int \frac{(k')^2 \sqrt{\frac{2l+1}{2}} |v_l| dk'}{2[E(\mathbf{k}') - E_F] + \Delta} \int P_l(\cos\tilde{\theta}) \delta(\theta'' - \theta) \delta(\varphi'' - \varphi) \sin\theta d\theta d\varphi. \quad (2.33)$$

W ostatnim kroku należy wykonać obustronnie następującą operację:

$$\lim_{(\theta'' \rightarrow \theta'), (\varphi'' \rightarrow \varphi')} \int () d\theta'' d\varphi'',$$

która to, po zamianie kolejnością wykonania granicy i całek po prawej stronie równania, prowadzi nas do wyniku:

$$\left(\frac{2V}{(2\pi)^3} \right) \int \frac{(k')^2 \sqrt{\frac{2l+1}{2}} |v_l| dk'}{2[E(\mathbf{k}') - E_F] + \Delta} \int P_l(1) \sin\theta' d\theta' d\varphi' = 1. \quad (2.34)$$

Powyższe równanie bardzo łatwo wyrazić poprzez gęstość stanów, co też zostało uczynione poniżej.

$$\int_{E_F}^{E_a} \frac{\rho(\epsilon)}{(\epsilon - \epsilon_F) + \frac{\Delta}{2}} d\epsilon = \frac{2}{\sqrt{\frac{2l+1}{2}} |v_l| P_l(1)}, \quad (2.35)$$

gdzie: E_a określa górną granicę istotnego przedziału energii ze względu na procesy rozpraszania, natomiast $P_l(1)$ dane jest jako:

$$P_l(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l \right] \quad (2.36)$$

i dla interesujących nas przypadków (tzn. $l = 0$ lub $l = 1$) wynosi:

$$P_0(1) = P_1(1) = 1 \quad (2.37)$$

Zauważmy, że $E_a \sim E_f$ (granica słabego sprzężenia) oraz oddziaływanie parujące stanowi bardzo małą energię w porównaniu z istotną zmiennością energii kinetycznej cząstek, co sprawia, że $\rho(\epsilon)$ nie zmienia się istotnie w przedziale $[E_F, E_a]$. Z powyższych wniosków wynika, że gęstość stanów występującą w (2.35) może zostać przybliżona przez gęstość stanów odpowiadającą energii Fermiego, tzn. $\rho(\epsilon) = \rho(E_F)$. Tak więc teraz można wyznaczyć energię wiązania elektronów w parę Coopera jako:

$$\Delta_l = 2 \frac{E_a - E_F}{\exp\left(\frac{2}{\rho(E_F)\sqrt{\frac{2l+1}{2}|v_l|}}\right) - 1}. \quad (2.38)$$

Ograniczenie energetyczne $E_F < \epsilon < E_a$ wynika z faktu, że efektywne oddziaływanie parujące spowodowane jest np. przez fonony, czyli skwantowane drgania sieci krystalicznej. Maksymalną częstość tych drgań określa częstość Debye'a ϖ_D a odpowiadająca jej energia $\hbar\varpi_D$ określa maksymalną dawkę energii, jaką elektrony mogą wymieniać między sobą w procesie rozpraszania prowadzącym do parowania. Możemy zatem napisać: $E_a - E_F \simeq \hbar\varpi_D$, co prowadzi do zależności:

$$\Delta_l = \frac{2\hbar\varpi_D}{\exp\left(\frac{2}{\rho(E_F)\sqrt{\frac{2l+1}{2}|v_l|}}\right) - 1} \simeq 2\hbar\varpi_D e^{\frac{-2}{\rho(E_F)\sqrt{\frac{2l+1}{2}|v_l|}}}. \quad (2.39)$$

Formuła (2.39) wyraża zależność energii wiązania rozpatrywanej pary elektronów, w funkcji wartości gęstości stanów odpowiadającej energii Fermiego. Bardzo łatwo można ten wzór przekształcić, tak aby Δ_l zależna była od pędu Fermiego, co też pokazano poniżej:

$$\Delta_l = \frac{2\hbar\varpi_D}{\exp\left(\frac{2\pi^2\hbar^2}{Vm k_F \sqrt{\frac{2l+1}{2}|v_l|}}\right) - 1} \simeq 2\hbar\varpi_D e^{\frac{-2}{Vm k_F \sqrt{\frac{2l+1}{2}|v_l|}}}. \quad (2.40)$$

W powyższej zależności V oznacz objętość układu.

Przybliżone równości w (2.39) i (2.40) wynikają z założenia, że w rozpatrywanych przypadkach (tzn. $l = 0$ lub $l = 1$) zachodzi zależność: $v_l \rho(E_F) \ll 1$. Warunek ten oznacza, że jeśli oznaczymy przez ΔE przedział energii przypadający na jeden niezaburzony stan kwantowy, to $v_l \ll \Delta E$. To właśnie oznacza przybliżenie słabego sprzężenia.

Poniższe związki:

$$\begin{cases} \Delta p_l \times \xi_l \simeq \hbar, \\ \Delta_l \simeq \frac{(\Delta p_l)^2}{4m}, \end{cases}$$

pozwalają w łatwy sposób oszacować średni rozmiar pojedynczej pary Coopera, który wynosi:

$$\xi_l = \frac{\hbar}{2\sqrt{m\Delta_l}}, \quad (2.41)$$

gdzie, energia wiązania Δ_l dana jest równaniami (2.38), (2.39) i (2.40).

Przyjmując w otrzymanych zależnościach $l = 0$, otrzymujemy wyniki dla parowania singletowego. Jeżeli zaś przyjmiemy $l = 1$, to otrzymamy wyniki dla trypletowego parowania elektronów zaindukowanego oddziaływaniami wymiennymi. Przede wszystkim interesujące dla nas są zależności opisujące energię wiązania powstałej pary Coopera, które w tym wypadku dane są odpowiednio dla singletu i trypletu w postaci:

$$\Delta_0 = \frac{2\hbar\varpi_D}{\exp\left(\frac{2}{\rho(E_F)\sqrt{\frac{1}{2}|v_0|}}\right) - 1} \simeq 2\hbar\varpi_D e^{\frac{-2}{\rho(E_F)\sqrt{\frac{1}{2}|v_0|}}}, \quad (2.42)$$

$$\Delta_1 = \frac{2\hbar\varpi_D}{\exp\left(\frac{2}{\rho(E_F)\sqrt{\frac{3}{2}|v_1|}}\right) - 1} \simeq 2\hbar\varpi_D e^{\frac{-2}{\rho(E_F)\sqrt{\frac{3}{2}|v_1|}}}. \quad (2.43)$$

Dodatkowo, wstawiając (2.42) lub (2.43) do (2.41), otrzymamy wzory określające średni szacowany rozmiar powstałej pary, które dane są odpowiednio dla singletu i trypletu w postaci:

$$\xi_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{8m\varpi_D}} \exp\left(\frac{1}{\rho(E_F)\sqrt{\frac{1}{2}|v_0|}}\right), \quad (2.44)$$

oraz

$$\xi_1 = \sqrt{\frac{\hbar}{8m\varpi_D}} \exp\left(\frac{1}{\rho(E_F)\sqrt{\frac{3}{2}|v_1|}}\right). \quad (2.45)$$

Szacowany rozmiar singletowej pary Coopera (co jest podane w [3]), wynosi:

$$\xi_0 \simeq 1000[\text{\AA}].$$

Wniosek jaki możemy wyciągnąć z tego wyniku jest taki, że w realnym materiale nadprzewodzącym występuje równoczesne przekrywanie się funkcji falowych ogromnej liczby par Coopera. Jest tak dlatego, że odległość klasyczna między elektronami w metalu wynosi $d_{ee} = \left(\frac{V}{N}\right)^{\frac{1}{3}} \sim 1\text{\AA}$. Mamy więc wtedy do czynienia z problemem wielu ciał, a do jego rozwiązania trzeba uciec się do metod stosowanych w takich wypadkach. Zajmuje się tym oczywiście teoria BCS, której fundamentalnym założeniem jest to, iż pojedyncza para porusza się w średnim polu wszystkich innych par w układzie.

2.3 Podsumowanie rozdziału.

W rozdziale niniejszym przeanalizowano ogólny mechanizm parowania elektronów zachodzącego w kanale o określonym l . Z przedstawionego modelu, wynikają zależności opisujące energię i rozmiar zarówno singletowej, jak i trypletowej pary Coopera.

Wartym uwagi jest fakt, że w stanie podstawowym zarówno singletowa jak i trypletowa para Coopera nie niosą ze sobą prądu elektrycznego (przypadek par bezprądowych), co jak łatwo się domyślić, ulegnie zmianie, gdy taka para znajdzie się w polu elektrycznym lub magnetycznym.

Należy zwrócić uwagę na to, że jeżeli potencjał parujący w przypadku parowania singletowego, przyjmiemy tak jak w oryginalnym podejściu Coopera [3] i oznaczymy go jako \tilde{v}_0 to zachodzi wtedy: $\tilde{v}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}v_0$, gdzie v_0 jest odpowiednim współczynnikiem rozwinięcia potencjału $V_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}$ w bazie ortonormalnych wielomianów Legendre'a.

W obu przedstawionych przypadkach parowania można dodatkowo rozważać układy z efektywną masą elektronów zależą od kierunku spinu, co (dla przypadku parowania singletowego) zostało pokazane w pracy [3].

Wspomniane powyżej zagadnienie, jest przedmiotem badań przeprowadzonych w następnym rozdziale.

Rozdział 3

Układ elektronów o spinowo-zależnych masach

3.1 Wprowadzenie.

W rozdziale tym rozważana będzie pojedyncza para elektronów, znajdujących się, podobnie jak poprzednio, na lub powyżej powierzchni Fermiego i oddziałujących ze sobą słabym potencjałem przyciągającym. Tym razem będziemy dodatkowo zakładać, że masy elektronów tworzących parę Coopera zależą od rzutu spinu na zadaną oś kwantowania (czyli od liczby kwantowej σ). Takie spinowo-zależne masy zostały wprowadzone w przypadku układów skorelowanych elektronów i opisane m. in. w pracy [4]. Podobnie, jak w przypadku omówionym w poprzednim rozdziale, również i w tym zaistnieć mogą dwie możliwości parowania elektronów, tzn. parowanie singletowe oraz parowanie trypletowe. Różnica pomiędzy tym a poprzednio omówionym problemem, wynika właśnie z zależności masy elektronu od rzutu jego spinu na zadaną oś kwantowania.

Podobnie, jak poprzednio, również i tym razem będziemy zakładać, że oddziaływanie pomiędzy elektronami wewnątrz kuli Fermiego a opisywaną parą elektronów można zaniedbać oraz, że szczegóły struktury elektronowej i krystalicznej badanych materiałów nie mają wpływu na jakościowe zrozumienie parowania. Stąd też zamiast periodycznego potencjału wprowadzamy pudło potencjału o objętości $V = L^3$.

3.2 Rozwiązanie problemu.

3.2.1 Energia Fermiego i gęstość stanów.

Na wstępie rozważmy układ N swobodnych elektronów, których masy zależą od rzutu ich spinów na zadaną oś kwantyzacji, znajdujących się w pudle potencjału o objętości V . Na układ ten nakładamy dodatkowo okresowe warunki brzegowe. Stany energetyczne elektronów tego układu opisane są podobnymi zależnościami jak w rozdziałach poprzednich. Różnicą, która między nimi występuje jest zależność energii od spinu.

Tak więc, mamy przestrzenną część funkcji falowej w postaci:

$$\Psi_n(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}}, \quad (3.1)$$

oraz energię daną w postaci:

$$E_{\mathbf{k}_n \sigma} = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}_n^2}{2m_\sigma}, \quad (3.2)$$

gdzie:

$$\mathbf{k}_n = \frac{2\pi}{V^{1/3}} [n_1, n_2, n_3], \quad n_1, n_2, n_3 \in Z \quad (3.3)$$

oraz m_σ jest efektywną spinowo-zależną masą elektronu w stanie kwantowym $|\sigma\rangle$ ($m_\uparrow \neq m_\downarrow$).

Ze względu na zależność masy elektronu od rzutu jego spinu na oś kwantyzacji w układzie tym mamy zniesioną degenerację spinową stanów jednocząstkowych. Dla ustalenia uwagi w dalszej części tego rozdziału będziemy przyjmować, że: $m_\uparrow < m_\downarrow$. Oczywiście, brak degeneracji spinowej w układzie powoduje, że każdy stan może być obsadzony tylko jeden raz. Z zależności (3.2) wnioskujemy, że elektroną o mniejszej masie odpowiada większa energia (w rozpatrywanym przypadku spin $\sigma = \uparrow$ pociąga za sobą większą energię). Ponieważ zgodnie z rozkładem Fermiego-Diraca, dla temperatury $T = 0$ elektrony zapełniają wszystkie poziomy energetyczne aż do poziomu Fermiego, więc więcej zostanie obsadzonych stanów z $\sigma = \downarrow$, jest to spowodowane większą ilością dozwolonych wartości wektora falowego k_n . Oczywiście, pęd Fermiego przyjmuje w tej sytuacji większą wartość niż dla $\sigma = \uparrow$. Mówimy wtedy o rozszczepieniu kuli Fermiego w przestrzeni pędów rozważanego układu, (jest to odbiciem założenia, że $m_\uparrow < m_\downarrow$). Ponieważ układ znajduje się w stanie równowagi, więc ma ustabilizowaną, i tylko jedną dla obu rodzajów elektronów, wartość energii Fermiego:

$$E_F = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}_{F\sigma}^2}{2m_\sigma} = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}_{F\sigma'}^2}{2m_{\sigma'}}. \quad (3.4)$$

Z zależności powyższej łatwo wyznaczamy związek pomiędzy $k_{F\sigma}$ i $k_{F\sigma'}$ w postaci:

$$k_{F\sigma} = \sqrt{\frac{m_\sigma}{m_{\sigma'}}} k_{F\sigma'} \quad (3.5)$$

W powyższych równaniach, tak jak i w dalszej części tego rozdziału, przyjęta została konwencja oznaczania rzutów spinu na zadany kierunek w postaci $\sigma\sigma'$. Taki zapis, jak łatwo się przekonać, jest uniwersalny. Uwzględnia on bowiem wszystkie możliwości ustawienia spinów rozpatrywanych elektronów tworzących daną parę.

Wykorzystując zależności określające całkowitą liczbę elektronów $N = N_\sigma + N_{\sigma'}$ i całkowitą gęstość stanów w układzie $\rho = \rho_\sigma + \rho_{\sigma'}$ oraz wzór (3.5), otrzymujemy dla zadanej liczby elektronów w układzie (wynoszącej N), wyrażenia opisujące:

wartość pędu Fermiego dla zadanej orientacji spinów

$$k_{F\sigma} = \left[6\pi^2 \frac{N}{V} \frac{m_\sigma^{\frac{3}{2}}}{m_\sigma^{\frac{3}{2}} + m_{\sigma'}^{\frac{3}{2}}} \right]^{\frac{1}{3}}; \quad (3.6)$$

gęstość stanów dla zadanej orientacji spinów

$$\rho_\sigma(E) = \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{2m_\sigma}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{E}; \quad (3.7)$$

energię Fermiego

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2} \left[6\pi^2 \frac{N}{V} \frac{1}{m_\sigma^{\frac{3}{2}} + m_{\sigma'}^{\frac{3}{2}}} \right]^{\frac{2}{3}}; \quad (3.8)$$

i całkowitą gęstość stanów

$$\rho(E) = \frac{V}{4\pi^2} \left[\left(\frac{2m_\sigma}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{2m_{\sigma'}}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \right] \sqrt{E}. \quad (3.9)$$

Podstawiając w powyższych zależnościach $\sigma = \uparrow\downarrow$, $\sigma' = \uparrow\downarrow$ otrzymujemy wyniki dla konkretnego ustawienia spinów. W szczególności, wszystkie powyższe zależności oprócz (3.7), redukują się do zależności znanych dla układu, w którym nie mamy do czynienia ze spinowo-zależnymi masami elektronów.

Podobnie, jak poprzednio, jako funkcję falową układu, przyjmujemy superpozycję funkcji falowych (3.1), w postaci:

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \chi_{\sigma\sigma'} \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} a_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1} e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_2}, \quad (3.10)$$

gdzie we współczynnikach $a_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}$ kryje się symetria (antysymetria) przestrzennej części funkcji falowej, natomiast $\chi_{\sigma\sigma'}$ jest spinową częścią funkcji falowej pary.

Oczywistym jest, że i w tym (najbardziej ogólnym z dotychczas rozważanych) przypadku, musimy narzucić na współczynniki $a_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}$ warunek:

$$a_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2} = 0 \quad \text{dla } |\mathbf{k}_1|, |\mathbf{k}_2| \leq k_F. \quad (3.11)$$

Niezależne od czasu Równanie Schrödingera przybiera zatem postać:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_\sigma} \nabla_{\mathbf{r}_1}^2 - \frac{\hbar^2}{2m_{\sigma'}} \nabla_{\mathbf{r}_2}^2 + V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \right] \Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = E\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \quad (3.12)$$

Po transformacji, zarówno funkcji falowej jak i równania Schrödingera, do współrzędnych środka masy (\mathbf{K}, \mathbf{R}) oraz współrzędnych względnych (\mathbf{k}, \mathbf{r}) danych odpowiednio w postaci:

$$\begin{cases} \mathbf{R} = \frac{m_\sigma \mathbf{r}_1 + m_{\sigma'} \mathbf{r}_2}{m_\sigma + m_{\sigma'}} \\ \mathbf{K} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 \end{cases}$$

oraz

$$\begin{cases} \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{k} = \frac{m_\sigma \mathbf{k}_1 - m_{\sigma'} \mathbf{k}_2}{m_\sigma + m_{\sigma'}}, \end{cases}$$

i po dodatkowym założeniu, że potencjał oddziaływania zależy jedynie od względnej odległości elektronów $V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = V(|\mathbf{r}|) = V(r)$ otrzymujemy funkcję falową w postaci:

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \chi_{\sigma\sigma'} \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{K}, \mathbf{k}} a_{\mathbf{K}, \mathbf{k}} e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (3.13)$$

oraz stacjonarne równanie Schrödingera dane jako:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_{\mathbf{R}}^2 - \frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla_{\mathbf{r}}^2 + V(r) - E \right] \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{K}, \mathbf{k}} a_{\mathbf{K}, \mathbf{k}} e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{R}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = 0, \quad (3.14)$$

gdzie: $M = m_\sigma + m_{\sigma'}$ jest masą całkowitą powstałej pary, natomiast $\mu = \frac{m_\sigma m_{\sigma'}}{m_\sigma + m_{\sigma'}}$ jest masą zredukowaną układu tych dwóch cząstek.

W następnym kroku mnożymy obustronnie otrzymane równanie przez: $\frac{1}{V}e^{-i\mathbf{K}'\cdot\mathbf{R}}e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}}$ a następnie obie strony tego równania całkujemy względem d^3R i d^3r , w wyniku czego otrzymujemy równanie:

$$\sum_{\mathbf{K},\mathbf{k}} \delta(\mathbf{K}-\mathbf{K}') \left[\delta(\mathbf{k},\mathbf{k}') a_{\mathbf{K},\mathbf{k}} \left(\frac{\hbar^2 K^2}{2M} + 2 \frac{\hbar^2 k^2}{4\mu} - E \right) + a_{\mathbf{K},\mathbf{k}} V_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} \right] = 0, \quad (3.15)$$

gdzie: $V_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} = \frac{1}{V} \int d^3r e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}} V(r) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$.

Podobnie jak poprzednio, teraz również otrzymaliśmy równanie, które jest mnożone przez $\delta(\mathbf{K}-\mathbf{K}')$, co, jak wiadomo oznacza, że pęd środka masy jest w tym układzie wielkością zachowaną. Zaś oddziaływanie zaburza jedynie pęd względny \mathbf{k} rozpatrywanej pary elektronów. Z tego też względu współczynniki $a_{\mathbf{K},\mathbf{k}}$, które wprowadzają oddziaływanie do funkcji falowej, będą w dalszej części zapisywane tylko z indeksem \mathbf{k} . Zatem równanie na energię własną układu przybiera teraz postać:

$$a_{\mathbf{k}'} = \frac{-1}{E(\mathbf{K}) + 2E(\mathbf{k}') - E} \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} V_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}. \quad (3.16)$$

gdzie: $E(\mathbf{K}) = \frac{\hbar^2 K^2}{2M}$ jest energią ruchu środka masy, $E(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu}$ jest energią ruchu względnego elektronów natomiast E jest energią stanu związanego rozpatrywanej pary.

Rozważana para oddziałujących elektronów jest stanem związanym.

Energię wiązania tego stanu możemy zdefiniować poprzez następującą zależność:

$$E = E_{\mathbf{K}} + 2E_F - \Delta_l^p, \quad (3.17)$$

gdzie: $l = 0, 1$, natomiast $p = -l, \dots, l$.

Przyjmując powyższą definicję założyliśmy, że $E(\mathbf{k}) = E_F$ dla rozpatrywanego przypadku.

Stosowana notacja pozwala na odróżnienie od siebie wszystkich możliwości parowania, które mogą się tutaj pojawić, tzn.

1. parowanie singletowe, ($l = 0, p = 0$)

2. parowanie trypletowe $\begin{cases} (l = 1, p = 1), \\ (l = 1, p = 0), \\ (l = 1, p = -1). \end{cases}$

Uwzględniając w (3.16) zależność (3.17) otrzymujemy:

$$a_{\mathbf{k}'} = \frac{-1}{2[E(\mathbf{k}') - E_F] + \Delta_l^p} \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} V_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}. \quad (3.18)$$

Z faktu, że $|a_{\mathbf{k}}|^2$ jest miarą prawdopodobieństwa zaistnienia pary Coopera w stanie o pędzie względnym \mathbf{k} wynika, że największe prawdopodobieństwo powstania tej pary jako stanu związanego ma miejsce, gdy $\forall k \in \langle k_F, k_a \rangle : |a_{\mathbf{k}}|$ przyjmuje wartość maksymalną, (należy pamiętać, że $\sum_{\mathbf{k}} |a_{\mathbf{k}}|^2$ maksymalnie może być równe jedności), co w oczywisty sposób pociąga za sobą: $E(\mathbf{K}) = 0$.

Przedstawione powyżej rozumowanie prowadzi do wniosku, że w stanie podstawowym, singletowa para Coopera, dla przypadku mas elektronów ją tworzących zależnych od rzutu spinu na wyróżnioną oś kwantyzacji, nie jest tak jak poprzednio parą bezprądową, tylko niesie ze sobą prąd elektryczny.

Mamy bowiem $\mathbf{K} = \mathbf{k} + \mathbf{k}' = 0$, co oznacza, że $\mathbf{k}' = -\mathbf{k}$ a to daje nam $\mathbf{p}' = -\mathbf{p}$, co ze względu na fakt $m_{\uparrow} \neq m_{\downarrow}$ pociąga za sobą następujący warunek: $\mathbf{v}' \neq -\mathbf{v}$, gdzie \mathbf{v}, \mathbf{v}' oznaczają odpowiednio prędkości parujących się elektronów). Zatem suma prądów $\mathbf{j} = -e\left(\frac{\mathbf{p}_{F\uparrow}}{m_{\uparrow}} + \frac{\mathbf{p}_{F\downarrow}}{m_{\downarrow}}\right) \neq 0$

Natomiast trypletowa para Coopera (w każdej z odmian) jest tak jak poprzednio parą bezprądową, tzn. nie niesie ze sobą wypadkowego prądu elektrycznego.

3.2.2 Energia wiązania i potencjał parujący w przestrzeni pędów.

Aby możliwe było kontynuowanie rozpoczętych rachunków, należy teraz zastanowić się nad postacią (w przestrzeni pędów) potencjału parującego $V_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}$, oraz określić postać współczynników $a_{\mathbf{k}}$.

Potencjał parujący w przestrzeni pędów w ogólnym przypadku zależy od wartości obu wektorów \mathbf{k}, \mathbf{k}' oraz od kąta względnego między nimi (oznaczymy go jako $\tilde{\theta}$). Dlatego rozpatrywany potencjał zostanie zapisany w bazie ortonormalnych stowarzyszonych funkcji Legendre'a postaci:

$$P_l^m(x) = \sqrt{\frac{2l+1}{2}} \sqrt{\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} (\sqrt{1-x^2})^{\frac{|m|}{2}} \frac{\partial^{|m|}}{\partial x^{|m|}} P_l(x),$$

względem zmiennej $x = \cos \tilde{\theta} = \hat{k} \cdot \hat{k}'$, gdzie \hat{k}, \hat{k}' są wersorami odpowiednio w kierunkach wektora \mathbf{k} i \mathbf{k}' , natomiast $P_l(x)$ jest wielomianem Legendre'a, który zdefiniowany został w poprzednim rozdziale.

Na uwagę zasługuje fakt, że w odróżnieniu od problemu omówionego w poprzednim rozdziale, w tym zakładamy, że mamy w jakiś sposób złamaną symetrię spinową układu, co objawia się tym, że efektywne masy elektronów tworzących parę Coopera, są zależne od rzutu ich spinu na zadaną oś kwantowania. Dlatego też potencjał parujący występujący w tym problemie został zapisany w bazie ortonormalnych stowarzyszonych funkcji Legendre'a $P_l^m(x)$ (gdzie m określa rzut spinu pary na zadaną oś kwantowania), a nie tak jak poprzednio w bazie ortonormalnych wielomianów Legendre'a $P_l(x)$.

Współczynniki $a_{\mathbf{k}}$ podobnie jak poprzednio zapiszemy w bazie ortonormalnych harmonik sferycznych $Y_{lm}(\theta, \varphi)$, gdzie θ i φ są współrzędnymi wektora \mathbf{k} w sferycznym układzie współrzędnych, w przestrzeni pędów, w którym wektor ten ma postać:

$$\begin{cases} k_x = k \sin \theta \cos \varphi, \\ k_y = k \sin \theta \sin \varphi, \\ k_z = k \cos \theta. \end{cases}$$

Układ harmonik sferycznych, jest zupełnym układem funkcji, oznacz to, że zachodzi relacja:

$$\sum_{lm} Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi) = \delta(\theta - \theta') \delta(\varphi - \varphi'). \quad (3.19)$$

Ostatecznie więc mamy:

$$V_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} = - \left| \sum_{lp} \sqrt{\frac{2l+1}{2}} \sqrt{\frac{(l-p)!}{(l+p)!}} P_l^p(\cos \tilde{\theta}) v_l^p(k, k') \right|, \quad (3.20)$$

oraz

$$a_{\mathbf{k}} = \sum_{lm} a_{lm} a_l(k) Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (3.21)$$

gdzie: $k = |\mathbf{k}|$, liczby a_{lm} są współczynnikami rozwinięcia, natomiast moduł zapewnia ujemną wartość potencjału, co odpowiada parowaniu elektronów. Oczywiście zachodzi: $m, p = -l, \dots, l$.

Rozpatrywana para elektronów ma z góry ustaloną wartość liczby kwantowej l (tutaj $l = 0$ lub $l = 1$). Więc dla tej właśnie wartości l elementy $v_l^p(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ przyjmują niezerowe wartości a dla innych wartości l przyjmują on wartości równe zero. Powyższe rozumowanie prowadzi nas do równania postaci:

$$V_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} = - \sqrt{\frac{2l+1}{2}} \left| \sum_p \sqrt{\frac{(l-p)!}{(l+p)!}} P_l^p(\cos \tilde{\theta}) v_l^p(k, k') \right| \quad (3.22)$$

Teraz uściślimy sformułowanie: "rozważamy elektrony znajdujące się na lub powyżej powierzchni Fermiego." Przyjmiemy bowiem założenie, że rozważane elektrony oddziałują między sobą tylko w wąskim przedziale wartości energii, powyżej powierzchni Fermiego. Możemy zatem elementy $v_l^p(k, k')$ przybliżyć wyrażeniem:

$$v_l^p(k, k') = \begin{cases} v_l^p = \text{const}(k, k') & \text{dla } k_{F\sigma'} < k, k' < k_{a\sigma} \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach,} \end{cases}$$

gdzie $k_{a\sigma}$ jest wartością pędu niewiele większą od $k_{F\sigma}$.

W powyższej definicji pojawił się element v_l^p , który w porównaniu z definicją zawartą w rozdziale poprzednim, dodatkowo zależy od liczby kwantowej p . Sytuacja ta jest odzwierciedleniem faktu, iż potencjał parujący zależy nie tylko od rodzaju parowania, z którym mamy do czynienia ale także od jego odmiany (w przypadku parowania trypletowego). Powyższa notacja w prosty sposób określa rodzaj i odmianę parowania a przez to i potencjał parujący, z którym mamy do czynienia. Dlatego będzie ona stosowana w dalszej części tego rozdziału.

Równanie (3.18) przybiera zatem postać:

$$a_{\mathbf{k}'} = \frac{1}{2[E(\mathbf{k}') - E_F] + \Delta_l^p} \sum_{\mathbf{k}} \left\{ a_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{2l+1}{2}} \left| \sum_p \sqrt{\frac{(l-p)!}{(l+p)!}} P_l^p(\cos \tilde{\theta}) v_l^p \right| \right\}. \quad (3.23)$$

Uwzględniając we wzorze (3.23) zależność (3.21) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \sum_{l'm'} a_{l'm'} a_{l'}(k') Y_{l'm'}(\theta', \varphi') = \\ \frac{\sum_{\mathbf{k}l'm'} \sqrt{\frac{2l+1}{2}} \left| \sum_p \sqrt{\frac{(l-p)!}{(l+p)!}} v_l^p P_l^m(\cos \tilde{\theta}) \right| a_{l'm'} a_{l'}(k) Y_{l'm'}(\theta, \varphi)}{2[E(\mathbf{k}') - E_F] + \Delta_l^p} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Powyższe równanie, przez analogię do równania otrzymanego wcześniej, można nazwać uogólnionym równaniem Coopera dla przypadku złamanej symetrii spinowej w układzie.

Po przeprowadzeniu rachunków, które z technicznego punktu widzenia są takie same jak te przeprowadzone w poprzednim rozdziale, otrzymujemy zależność:

$$\left(\frac{2V}{(2\pi)^3} \right) \int \frac{(k')^2 \sqrt{\frac{2l+1}{2}} dk'}{2[E(\mathbf{k}') - E_F] + \Delta_l^p} \int \left| \sum_p \sqrt{\frac{(l-p)!}{(l+p)!}} P_l^p(1) v_l^p \right| \sin \theta' d\theta' d\varphi' = 1, \quad (3.25)$$

która po uwzględnieniu następujących wyników:

$$\begin{cases} P_0^0 = 1 & \text{dla parowania singletowego,} \\ P_1^1(1) = P_1^{-1}(1) = 0 \text{ i } P_1^0(1) = 1 & \text{dla parowania trypletowego,} \end{cases}$$

przechodzi w równanie postaci:

$$\left(\frac{2V}{(2\pi)^3} \right) \int \frac{(k')^2 \sqrt{\frac{2l+1}{2}} |v_l^p| dk'}{2[E(\mathbf{k}') - E_F] + \Delta_l^p} \int \sin \theta' d\theta' d\varphi' = 1, \quad (3.26)$$

gdzie tym razem mamy:

$$\begin{cases} 1 = 0, m = 0, & \text{dla parowania singletowego,} \\ 1 = 1, m = 0, & \text{dla parowania trypletowego.} \end{cases}$$

Otrzymane powyżej równanie bardzo łatwo przekształcamy do postaci:

$$\int \frac{k^2 dk}{\frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} - 2E_F + \Delta_l^p} = \frac{(\pi)^2}{V \sqrt{\frac{2l+1}{2}} |v_l^p|}, \quad (3.27)$$

gdzie zamieniliśmy k' na k .

Ponieważ rozpatrujemy bardzo wąski przedział wartości wektora falowego k , więc możemy w powyższej zależności wykonać następujące przybliżenie:

$$k_{F_l}^p = \frac{k_{F\sigma} + k_{F\sigma'}}{2}.$$

Dodatkowo, musimy teraz podać obszar całkowania po który wykonywać będziemy całkę daną w postaci (3.27). Obszar ten to odcinek na osi k o początku w punkcie, któremu odpowiada mniejsza z dwóch rozważanych wartości pędu Fermiego, oznaczmy go przez $k_{F\sigma'}$. Natomiast jego koniec znajduje się w punkcie $k_{a\sigma}$. Pęd ten odpowiada z założenia pędowi niewiele większemu od większej z rozważanych wartości pędu Fermiego.

Tak więc, otrzymujemy następujące równanie:

$$\int_{k_{F\sigma'}}^{k_{a\sigma}} \frac{k dk}{\frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} - 2E_F + \Delta_l^p} = \frac{(\pi)^2}{k_{F_l}^p \sqrt{\frac{2l+1}{2}} |v_l^p|}, \quad (3.28)$$

które po wykonaniu elementarnego całkowania przechodzi w równanie postaci:

$$\frac{k_{a\sigma}^2 - \frac{2\mu}{\hbar^2}(2E_{F_l}^p - \Delta_l^p)}{k_{F\sigma'} - \frac{2\mu}{\hbar^2}(2E_F - \Delta_l^p)} = \exp\left(\frac{\pi^2 \hbar^2}{\mu V \sqrt{\frac{2l+1}{2}} k_{F_l}^p |v_l^p|}\right). \quad (3.29)$$

Po uwzględnieniu poniższych zależności:

$$k_{a\sigma} = k_{F\sigma} + \Delta k;$$

$$\frac{\hbar^2 k_{F\sigma}^2}{2\mu} - \frac{\hbar^2 k_{F\sigma}^2}{2\sigma} - \frac{\hbar^2 k_{F\sigma'}^2}{2\sigma'} = E_F \left(\frac{m_\sigma}{m_{\sigma'}} - 1\right);$$

$$\frac{\hbar^2 k_{F\sigma'}^2}{2\mu} - \frac{\hbar^2 k_{F\sigma}^2}{2\sigma} - \frac{\hbar^2 k_{F\sigma'}^2}{2\sigma'} = E_F \left(\frac{m_{\sigma'}}{m_\sigma} - 1\right);$$

$$\hbar\omega_D = \frac{\hbar^2}{2m_\sigma} (k_{F\sigma} + \Delta k)^2 - \frac{\hbar^2}{2m_{\sigma'}} k_{F\sigma'}^2 = \frac{\hbar^2}{m_\sigma} k_{F\sigma} \Delta k + \frac{\hbar^2}{2m_\sigma} (\Delta k)^2;$$

i wykonaniu prostych przekształceń, wyznaczamy z równania (3.29) zależność opisującą energię wiązania pary Coopera, w postaci:

$$\Delta_l^p = \left[\exp \left(\frac{\pi^2 \hbar^2}{\mu V \sqrt{\frac{2l+1}{2}} \hbar k_{F_l}^p |v_l^p|} \right) - 1 \right]^{-1} \times \left[\frac{m_\sigma \hbar \varpi_D}{\mu} + E_F \left(\frac{m_\sigma}{m_{\sigma'}} - 1 \right) - E_{F_l}^p \left(\frac{m_{\sigma'}}{m_\sigma} - 1 \right) \exp \left(\frac{\pi^2 \hbar^2}{\mu V \sqrt{\frac{2l+1}{2}} k_{F_l}^p |v_l^p|} \right) \right]. \quad (3.30)$$

Powyższą zależność, można po zdefiniowaniu wielkości:

$$\Delta m_{\sigma\sigma'} = m_{\sigma'} - m_\sigma,$$

zwanej rozszczepieniem masowym, zapisać ostatecznie jako:

$$\Delta_l^p = \left[\exp \left(\frac{\pi^2 \hbar^2}{\mu V \sqrt{\frac{2l+1}{2}} k_{F_l}^p |v_l^p|} \right) - 1 \right]^{-1} \times \left[\frac{m_\sigma \hbar \varpi_D}{\mu} - E_F \Delta m_{\sigma\sigma'} \left(\frac{1}{m_{\sigma'}} + \frac{1}{m_\sigma} \exp \frac{\pi^2 \hbar^2}{\mu V \sqrt{\frac{2l+1}{2}} k_{F_l}^p |v_l^p|} \right) \right]. \quad (3.31)$$

Oszacowanie średniego rozmiaru pojedynczej pary Coopera w tym przypadku, prowadzi do następującej zależności:

$$\xi_l^p = \hbar [2(m_\sigma + m_{\sigma'}) \Delta_l^p]^{-\frac{1}{2}} = \hbar [2(m_\sigma + m_{\sigma'}) \Delta_l^p]^{-\frac{1}{2}} \left[\exp \left(\frac{\pi^2 \hbar^2}{\mu V \sqrt{\frac{2l+1}{2}} k_{F_l}^p |v_l^p|} \right) - 1 \right]^{-\frac{1}{2}} \times \left[\frac{m_\sigma \hbar \varpi_D}{\mu} - E_F \Delta m_{\sigma\sigma'} \left(\frac{1}{m_{\sigma'}} + \frac{1}{m_\sigma} \exp \frac{\pi^2 \hbar^2}{\mu V \sqrt{\frac{2l+1}{2}} k_{F_l}^p |v_l^p|} \right) \right], \quad (3.32)$$

gdzie, energia wiązania Δ_l^p dana jest równaniami powyżej.

Jeżeli przyjmiemy w otrzymanych zależnościach (wzory (3.30), (3.31) i (3.32)):

1. $l = 0, p = 0$, to otrzymamy wtedy wyniki dla singletowego parowania elektronów w układzie, w którym występuje rozszczepienie masowe Δm ;
2. $l = 1, p = 0$, to otrzymamy wyniki dla parowania trypletowego w układzie o spinowo-zależnych masach elektronów.

Mamy zatem:

energia wiązania dla parowania singletowego

$$\Delta_0^0 = \left[\exp \left(\frac{\pi^2 \hbar^2}{\mu V \sqrt{\frac{1}{2}} \hbar k_{F_0^0} |v_0^0|} \right) - 1 \right]^{-1} \times \left[\frac{m_\uparrow}{\mu} \hbar \varpi_D - E_F \Delta m_{\uparrow\downarrow} \left(\frac{1}{m_\downarrow} + \frac{1}{m_\uparrow} \exp \frac{\pi^2 \hbar^2}{\mu V \sqrt{\frac{1}{2}} \hbar k_{F_0^0} |v_0^0|} \right) \right], \quad (3.33)$$

energia wiązania dla parowania trypletowego

$$\Delta_1^0 = 2 \hbar \varpi_D \left[\exp \left(\frac{\pi^2 \hbar^2}{\mu V \sqrt{\frac{3}{2}} \hbar k_{F_1^0} |v_0^1|} \right) - 1 \right]^{-1}. \quad (3.34)$$

Średni rozmiar pary Coopera w przypadku parowania singletowego

$$\xi_0^0 = \hbar \frac{1}{\sqrt{2(m_\uparrow + m_\downarrow)}} \left[\exp \left(\frac{\pi^2 \hbar^2}{\mu V \sqrt{\frac{1}{2}} \hbar k_{F_0^0} |v_0^0|} \right) - 1 \right]^{\frac{1}{2}} \times \left[\frac{m_\uparrow}{\mu} \hbar \varpi_D - E_F \Delta m_{\uparrow\downarrow} \left(\frac{1}{m_\downarrow} + \frac{1}{m_\uparrow} \exp \frac{\pi^2 \hbar^2}{\mu V \sqrt{\frac{1}{2}} \hbar k_{F_0^0} |v_0^0|} \right) \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.35)$$

średni rozmiar pary Coopera w przypadku parowania trypletowego

$$\xi_1^0 = \sqrt{\frac{\hbar}{8m\varpi_D}} \left[\exp \left(\frac{\pi^2 \hbar^2}{\mu V \sqrt{\frac{3}{2}} \hbar k_{F_1^0} |v_0^1|} \right) - 1 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.36)$$

gdzie m oznacza masę pojedynczego elektronu tworzącego daną parę.

Powyższe wzory opisują energię i średni rozmiar wszystkich możliwych par Coopera jakie mogą powstać na skutek oddziaływania wymiennego między elektronami, w układzie ze spinowo-zależnymi masami elektronów.

W szczególności, w przypadku parowania singletowego, redukują się one, po podstawieniu $m_\uparrow = m_\downarrow$, do znanych z poprzedniego rozdziału wzorów opisujących singletową parę Coopera w układzie, w którym nie występuje rozszczepienie masowe Δm . Natomiast w przypadku parowania trypletowego, struktura zależności opisujących energię i średni rozmiar trypletowej pary Coopera w układzie o spinowo zależnych masach elektronów jest taka sama jak w układzie, w którym masy elektronów nie zależą od ich spinu.

3.3 Podsumowanie rozdziału.

W rozdziale niniejszym przeanalizowany został ogólny mechanizm parowania elektronów zaindukowanego oddziaływaniami wymiennymi w układzie, w którym występują efektywne spinowo-zależne masy elektronów.

Z modelu, który został tutaj przedstawiony wynikają zależności opisujące energię i rozmiar, zarówno singletowej jak i trypletowej pary Coopera. Są to wzory od (3.30) do (3.36).

Z zależności powyższych widać, że opisany tutaj model parowania redukuje się do omówionego wcześniej modelu, w którym nie występuje rozszczepienie masowe. Wszystkie wyniki, które otrzymaliśmy dla parowania z degeneracją spinową w układzie, otrzymujemy z omówionego w tym rozdziale modelu jeżeli położymy: $m_\sigma = m_{\sigma'}$.

Zauważmy, że w stanie podstawowym singletowa para Coopera nie jest parą bezprądową ale niesie ze sobą prąd elektryczny. Sytuacja taka wynika z faktu złamania symetrii spinowej układu, co przejawia się w różnicach efektywnych mas elektronów tworzących taką parę.

Zwróćmy jeszcze uwagę na fakt, że w przypadku parowania trypletowego, w układzie ze zniesioną degeneracją spinową, powstała para Coopera ustawa się zawsze w taki sposób aby jej wypadkowy spin był prostopadły do wyróżnionego kierunku kwantowania. Sytuacja taka pozwala na sterowanie zachowaniem się trypletowej par Coopera, poprzez czynnik zadany z zewnątrz, np. pole magnetyczne lub pole elektryczne.

Jednak, aby mieć pełny obraz przedstawionej tutaj sytuacji, należy rozważyć uogólnioną na przypadek dowolnego parowania, teorię BCS.

Wreszcie należy zwrócić uwagę na to, że jeżeli potencjał parujący, który został wprowadzony w oryginalnym podejściu Coopera, dla przypadku parowania singletowego [3], oznaczymy jako \tilde{v}_0 , to zachodzi wtedy: $\tilde{v}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}v_0^0$, gdzie v_0^0 jest odpowiednim współczynnikiem rozwinięcia potencjału $V_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}$ w bazie ortonormalnych stowarzyszonych funkcji Legendre'a.

Rozdział 4

Problem Coopera w języku II kwantowania

Równorzędnym formalizmem do I kwantowania jest w przypadku nie-relatywistycznym II kwantowanie. Jest to formalizm, który został podany kilka lat po sformułowaniu mechaniki falowej. Jego nazwa bierze się stąd, że operatory opisujące cząstki mają podobną strukturę do wartości oczekiwanej operatorów w I kwantowaniu, można by zatem powiedzieć, że mamy do czynienia z "powtórny kwantowaniem". W efekcie zamiast pakietów falowych, z którymi mamy do czynienia w mechanice falowej Schrödingera, pojawia się dobrze określony język cząstkowy. Otrzymany w ten sposób obraz jest bardzo prosty w interpretacji i bardzo często pozwala na kierowanie się intuicją. Dowód równoważności obu tych formalizmów można znaleźć np. w [7].

4.1 Podstawowe definicje w II kwantowaniu.

Operatory jedno i dwucząstkowe są zdefiniowane w reprezentacji II kwantowania za pomocą następujących zależności:

$$\hat{O}_1 = \sum_{\sigma} \int d^3r \Psi_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{r}) O_1(\mathbf{r}) \Psi_{\sigma}(\mathbf{r}) \quad (4.1)$$

$$\hat{O}_2 = \sum_{\sigma\sigma'} \int d^3r d^3r' \Psi_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{r}) \Psi_{\sigma'}^{\dagger}(\mathbf{r}') O_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Psi_{\sigma'}(\mathbf{r}') \Psi_{\sigma}(\mathbf{r}) \quad (4.2)$$

gdzie: $O_1(\mathbf{r})$ oraz $O_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ są operatorami w obrazie Schrödingera, natomiast $\Psi_{\sigma}(\mathbf{r})$ jest operatorem pola dla zadanej spinowej liczby kwantowej σ .

Zależne od spinu operatory pola konstruowane są według następujących reguł:

$$\Psi_\sigma(\mathbf{r}) = \sum_i a_{i\sigma} \phi_i(\mathbf{r}) \chi_\sigma, \quad (4.3)$$

gdzie: $\{\phi_i(\mathbf{r})\}$ jest zupełnym zbiorem ortonormalnych, jednocząstkowych funkcji falowych a χ_σ jest częścią spinową funkcji falowej, spełniającą następującą relację $\chi_\sigma^\dagger \chi_{\sigma'} = \delta_{\sigma\sigma'}$, natomiast $a_{\mathbf{k}\sigma}, a_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger$ są odpowiednio operatorami anihilacji i kreacji cząstki w stanie jednocząstkowym $|k\sigma\rangle$. Operatory te spełniają następujące reguły (anty)komutacji (znak ”+” odpowiada fermionom, a ”-” bozonom):

$$[a_{i\sigma}, a_{i'\sigma'}^\dagger]_{\mp} = \delta_{ii'} \delta_{\sigma\sigma'}; [a_{i\sigma}, a_{i'\sigma'}]_{\mp} = [a_{i\sigma}^\dagger, a_{i'\sigma'}^\dagger]_{\mp} = 0. \quad (4.4)$$

Stan próżni $|0\rangle$ zdefiniowany jest następującym związkiem: $a_{\mathbf{k}\sigma}|0\rangle \equiv 0$. Działając operatorami kreacji na stan próżni $|0\rangle$, można zbudować całą przestrzeń Focka, mówimy wtedy o tzw. reprezentacji liczb obsadzeń.

Reguły (anty)komutacji spełniane przez operatory kreacji i anihilacji cząstek w oczywisty sposób przenoszą się na (zależne od spinu) operatory pola. Reguły te dla spinowych operatorów pola mają następującą postać (znak ”+” odpowiada fermionom, a ”-” bozonom):

$$\begin{aligned} [\Psi_\sigma(\mathbf{r}), \Psi_{\sigma'}(\mathbf{r}')]_{\mp} &= [\Psi_\sigma(\mathbf{r})^\dagger, \Psi_{\sigma'}(\mathbf{r}')^\dagger]_{\mp} = 0 \\ [\Psi_\sigma(\mathbf{r}), \Psi_{\sigma'}(\mathbf{r}')^\dagger]_{\mp} &= \delta_{\sigma\sigma'} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \end{aligned} \quad (4.5)$$

Całkowity (niezależny od spinu) operator pola dany jest w następującej postaci spinorowej:

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sum_\sigma \Psi_\sigma(\mathbf{r}) \equiv \sum_i \phi_i(\mathbf{r}) \begin{pmatrix} a_{i\uparrow} \\ a_{i\downarrow} \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

4.2 Rozwiązanie problemu Coopera w języku II kwantowania.

Opierając się na informacjach zawartych w poprzednim paragrafie można hamiltonian oddziałującej pary elektronów zapisać w przestrzeni pędów w następującej postaci:

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \epsilon_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger a_{\mathbf{k}\sigma} + \sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{\sigma\sigma'} a_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger a_{-\mathbf{k}\sigma'}^\dagger a_{-\mathbf{k}'\sigma'} a_{\mathbf{k}'\sigma}; \quad |\mathbf{k}|, |\mathbf{k}'| > k_F. \quad (4.7)$$

Od razu zostało tutaj założone, że rozpatrywane elektrony mają przeciwnie skierowane pędy. Natomiast przyjmując odpowiednio $\sigma' = -\sigma$ lub $\sigma' = \sigma$ otrzymamy hamiltonian odpowiadający jednej z możliwych pary Coopera, która może powstać.

Pierwszy wyraz w hamiltonianie opisuje swobodną propagację elektronów umieszczonych powyżej powierzchni Fermiego przez kryształ. Został on wyprowadzony przy wykorzystaniu definicji operatora jednocząstkowego w II kwantowaniu i przy wyborze operatora pola w postaci:

$$\Psi_\sigma(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k},\sigma} \chi_\sigma \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}. \quad (4.8)$$

Natomiast drugi wyraz przedstawia oddziaływanie. Wyraz z oddziaływaniem można wyprowadzić przy użyciu metody transformacji kanonicznej, w drugim rzędzie rachunku zaburzeń, prowadzonym dla hamiltonianu opisującego układ elektron-fonon.

Stan w przestrzeni Focka, rozpatrywanej pary elektronów, postulowany jest w postaci:

$$|F\rangle = \sum_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger a_{-\mathbf{k}\sigma'}^\dagger |0\rangle, \quad (4.9)$$

gdzie stan $|0\rangle$ jest stanem podstawowym układu w $T = 0$ (wszystkie poziomy poniżej powierzchni Fermiego są obsadzone). Oczywiście, tak jak poprzednio, współczynniki $\alpha_{\mathbf{k}}$ muszą spełniać warunek uwzględniający zakaz Pauliego. Dodatkowo normalizacja wektora stanu ($\langle F|F\rangle = 1$) narzuca na nie warunek postaci:

$$\sum_{\mathbf{k}} |\alpha_{\mathbf{k}}|^2 = 1. \quad (4.10)$$

Wykorzystując teraz zależności (4.7) i (4.9) możemy zbudować funkcjonal energii według następującej formuły: $E\{a_{\mathbf{k}}, \alpha_{\mathbf{k}}^*\} = \langle F|\hat{H}|F\rangle$. Następnie stosując metodę mnożników Lagrange'a, w której uwzględniamy więź (4.10)

narzucony na układ, otrzymujemy funkcjonal postaci

$$F\{\alpha_{\mathbf{k}}, \alpha_{\mathbf{k}}^*\} = \langle F|\hat{H}|F\rangle - \lambda \left(\sum_{\mathbf{k}} |\alpha_{\mathbf{k}}|^2 - 1 \right), \quad (4.11)$$

który z kolei minimalizujemy względem współczynników $\alpha_{\mathbf{k}}^*$

$$\frac{\delta}{\delta \alpha_{\mathbf{k}}^*} F\{\alpha_{\mathbf{k}}, \alpha_{\mathbf{k}}^*\} = \frac{\delta}{\delta \alpha_{\mathbf{k}}^*} E\{\alpha_{\mathbf{k}}, \alpha_{\mathbf{k}}^*\} - \lambda \alpha_{\mathbf{k}} = 0. \quad (4.12)$$

Postępowanie takie prowadzi ostatecznie do równania postaci:

$$\alpha_{\mathbf{k}}(2\epsilon_{\mathbf{k}} - \lambda) + \sum_{\mathbf{k}'} \alpha_{\mathbf{k}'} V_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} = 0. \quad (4.13)$$

Otrzymane równanie (4.13), sprowadza się do równania (2.14) (dla $E_{\mathbf{K}} = 0$) w przypadku gdy w układzie nie występuje rozszczepienie masowe Δm . Równanie to sprowadza się również do równania (3.16) (dla $E_{\mathbf{K}} = 0$) w przypadku układu elektronów o spinowo-zależnych masach. Przy czym w obu tych przypadkach okazuje się że λ pełni rolę energii własnej rozpatrywanego układu.

Jak więc widać, obydwie formalizmy (zarówno język I jak i II kwantowania) prowadzą do takich samych wyników. Formalizm II kwantowania jest jednak wygodniejszy w bardziej skomplikowanych sytuacjach. Jest też jedynym, w którym można sformułować konsekwentnie teorię BCS.

4.3 Podsumowanie rozdziału.

W powyższym rozdziale przedstawione zostało, w języku II kwantowania, rozwiązanie problem Coopera dla przypadku dowolnego parowania elektronów. Rozwiązanie to obejmuje parowanie zarówno singletowe jak i trypletowe. Obejmuje ono również parowanie elektronów o spinowo-zależnych masach.

Oczywistym jest, że stosując formalizmy I i II kwantowania powinniśmy otrzymać identyczne wyniki. Widać to wyraźnie gdy porównamy ze sobą równania (2.14) i (4.13) oraz równania (3.16) i (4.13). Równania te wyprowadzone zostały odpowiednio w obu tych językach. Opisują one energię wiązania pary, w układzie, w którym nie występuje rozszczepienie masowe Δm oraz w układzie, w którym mamy do czynienia ze spinowo-zależnymi masami elektronów tworzącymi daną parę.

Rozdział 5

Podsumowanie pracy

W zaprezentowanej pracy przedstawiony został model parowania elektronów zaindukowanego oddziaływaniami wymiennymi. Model taki rozpatrzono w dwóch przypadkach.

W pierwszym z nich, omówionym w rozdziale drugim, przedstawiono model parowania w kryształach, w którym nie istnieje wyróżniony kierunek w przestrzeni. W rozważanym układzie mogą zaistnieć dwa rodzaje parowania, a mianowicie: parowanie singletowe charakteryzujące się liczbą kwantową ($l = 0$) oraz parowanie trypletowe scharakteryzowane liczbą kwantową ($l = 1$). Powstałe w takich warunkach pary Coopera, nie są opisywane poprzez liczbę kwantową m , tzn. liczbę, która charakteryzuje rzut wypadkowego spinu całego układu na zadaną oś kwantowania. Podejście takie wynika z faktu, iż w badanym układzie nie istnieje wyróżniony kierunek w przestrzeni. W dalszej części zostały wyznaczone analitycznie zależności opisujące zarówno energię wiązania jak również rozmiar par, które mogą powstać w takim układzie. Z otrzymanych zależności wypływają trzy ważne wnioski. Pierwszy z nich jest taki, że pary Coopera tworzą się najczęściej, wtedy gdy, energia środka masy elektronów tworzących taką parę jest równa zeru ($E_{\mathbf{K}} = 0$). Drugi mówi, że rozmiar powstałej pary Coopera jest odwrotnie proporcjonalny do pierwiastka kwadratowego z jej energii wiązania ($\xi_l \sim \frac{1}{\sqrt{\Delta_l}}$). Natomiast trzeci, to fakt, iż obydwa rodzaje par, jakie mogą powstać w rozważanym układzie, to pary bezprądowe.

Z kolei, w drugim z omawianych modeli, który opisany jest w rozdziale trzecim, przedstawiona została pojedyncza para Coopera o efektywnych masach tworzących ją elektronów, zależnych od kierunków spinów wynikających z oddziaływania kulombowskiego między nimi. W rozważanym układzie mogą wystąpić również dwa rodzaje par. Jednakże, tym razem, w odróżnieniu od przypadku dyskutowanego poprzednio, musimy do opisu powstałych par Coopera użyć liczby kwantowej m . Jest to podyktowane faktem złamania

symetrii badanego układu, które objawia się w postaci zależności masy elektronów od rzutów ich spinów na zadaną oś kwantowania. Pary jakie mogą powstać w rozpatrywanym układzie to: para singletowa scharakteryzowana liczbami kwantowymi ($l = 0, m = 0$) oraz para trypletowa, którą charakteryzują następujące liczby kwantowe ($l = 0, m = 0$). Na pozór zadziwiający jest fakt, że w układzie tym nie występują trypletowe pary Coopera opisane liczbami kwantowymi: ($l = 1, m = -1$) oraz ($l = 1, m = 1$). Jednak, po głębszej analizie tego problemu, powyższy wniosek jest wręcz naturalny i nie ma w nim nic zadziwiającego. Jest on bowiem nieuniknioną konsekwencją złamania symetrii rozważanego układu i wynika z rozróżnialności cząstek, gdyż: $m_{\uparrow} \neq m_{\downarrow}$.

Podobnie jak poprzednio, również i tym razem zostały wyznaczone analitycznie zależności opisujące energię wiązania oraz rozmiar powstałych w takich warunkach par Coopera. Wnioski wynikające z tych zależności, które dotyczą energii wiązania oraz rozmiaru badanych par są prawie takie same jak odpowiadające im wnioski, które otrzymane zostały w poprzednim przypadku. Różnica, która między nimi występuje, przejawia się w przypadku parowania singletowego i polega na tym, że energia wiązania singletowej pary Coopera zależy od wielkości rozszczepienia masowego Δm , które występuje pomiędzy elektronami tworzącymi taką parę. Z analizy zależności opisującej energię wiązania tej pary wynika wniosek, że im większe Δm dla tej pary, tym słabsze jest jej wiązanie. Natomiast, jeżeli chodzi o to, czy rozpatrywane pary są bezprądowe czy też nie, to sprawa ta przedstawia się nieco inaczej, niż w poprzednio omawianym przypadku. A mianowicie, singletowa para, nie jest tak, jak poprzednio, parą bezprądową, tylko niesie prąd elektryczny. Fakt ten jest konsekwencją występowania w układzie spinowo-zależnych mas elektronów tworzących tą parę. Natomiast jeżeli chodzi o przypadek pary trypletowej, to tym razem, podobnie jak poprzednio, jest ona parą bezprądową.

Omawiany powyżej model parowania elektronów o spinowo-zależnych masach redukuje się w szczególnym przypadku do rozważanego poprzednio modelu, jeżeli tylko przyjąć, że efektywne masy obu elektronów tworzących daną parę Coopera są zawsze sobie równe (tzn. nie istnieje rozszczepienie masowe Δm)

W czwartym rozdziale tej pracy, w bardzo krótkiej formie zostały omówione wszystkie powyższe problemy w języku II kwantowania. Otrzymane wnioski po zastosowaniu tego formalizmu są takie same jak te, które zostały otrzymane w języku I kwantowania. Nic w tym dziwnego, ponieważ jak wiadomo obydwa te formalizmy są równoważne.

Bibliografia

- [1] A.L. Fetter, J.D. Walecka
Kwantowa teoria układów wielu cząstek, PWN, Warszawa 1988
- [2] Walter A. Harrison
Teoria ciała stałego, PWN, Warszawa 1976
- [3] P. Wróbel
Pary Coopera w niestandardowych układach sieciowych, Praca magisterska, Kraków 1999
- [4] J. Spałek, P. Gopalan Phys. Rev. Lett. 64 (1990) 2823
Almost localized electrons in a magnetic field
- [5] A. Kleinberg, J. Spałek, Phys. Rev. B 57 (1998) 12041
Simple treatment of the metal - insulator transition: Effects of degeneracy, temperature and applied magnetic field
- [6] L.N. Cooper, Phys. Rev. 104 (1956) 1189
Bound electron pairs in a degenerate Fermi gas
- [7] B. Robertson, AJP 41 (1973) 678
Introduction to field operators in quantum mechanics
- [8] P.W. Anderson, Physica B 199 & 200 (1994) 8
Two new developments in the theory of high T_c superconductivity
- [9] K.A. Müller, J.G Bednorz, Physica B 64 (1986) 189
Possible high T_c superconductivity in the Ba - La - Cu - O system
- [10] S. Brzezowski
Wstęp do mechaniki kwantowej, wydano nakładem Instytutu Fizyki Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków 1997

- [11] M. Cyrot, D. Pavuna
Wstęp do nadprzewodnictwa, PWN, Warszawa 1996
- [12] K. Zalewski
Wykłady z nierelatywistycznej mechaniki kwantowej, PWN, Warszawa 1997
- [13] W.E. Lawrence, S. Doniach, in Proc. 12th Int. Conf. on Low Temperature Physics, Kyoto, Japan, 1971, ed. E. Kanda (Keigaku, Tokyo, 1971) p.361
Theory of layer structure superconductors
- [14] L.D. Landau
Mechanika kwantowa - teoria nierelatywistyczna, PWN, Warszawa 1979 (wyd 2)
- [15] K. Byczuk, J. Spałek, Phys. Rev. B 53 (1996) 518 (Rapid Comm.)
Transition temperature and a spatial dependence of the superconducting gap for multilayer high-temperature superconductors
- [16] P.T. Matthews
Wstęp do mechaniki kwantowej, PWN, Warszawa 1977
- [17] Ch. Kittel
Wstęp do fizyki ciała stałego, PWN, Warszawa 1999
- [18] K. Byczuk, J. Spałek, W. Wójcik, Phys. Rev. B 46 (1992) 14134
Microscopic model of hybrid pairing: II. Exact solution for a single pair
- [19] H. Ibach, H. Lüth
Fizyka ciała stałego, PWN, Warszawa 1996
- [20] J. Spałek, Phys. Rev. B 63 (2000) 104513
Spin-triplet superconducting pairing due to local Hund's rule and Dirac exchange